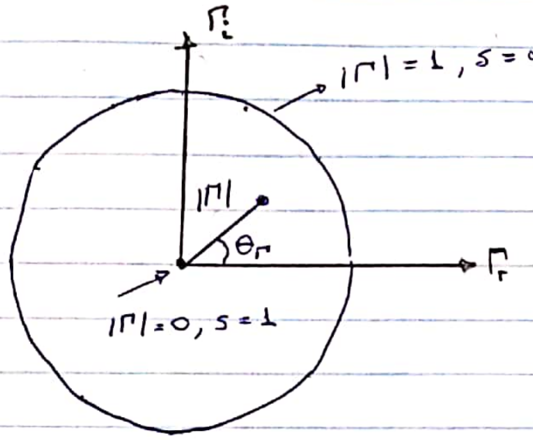
Carta de Smith 1a

- É a técnica gráfica mais comumente utilizada p/ a análise de L.T.

Como é construída:

- construída dentro de um círculo de raio unitário ($|\Gamma| \leq 1$)



A construção é baseada na seguinte relação:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1)$$

ou

$$\Gamma = |\Gamma| \angle \theta_r = \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (2)$$

A carta de smith (CS) trabalha com impedância normalizada p/ a impedância característica Z_0 da linha em consideração.

Para uma impedância de carga Z_L, a impedância normalizada z_L (minúsculo) é dada por:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = r + jx \quad (3)$$

substituindo (3) → (1) e (2):

$$\Gamma = \frac{\cancel{Z_0}\left(Z_L/Z_0 - 1\right)}{\cancel{Z_0}\left(Z_L/Z_0 + 1\right)}$$

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = \Gamma_r + j\Gamma_i \qquad (4)$$

de (4), podemos escrever:

$$z_L = \frac{(1+\Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1-\Gamma_r) - j\Gamma_i} = r + jx \qquad (5)$$

$$r + jx = \frac{\left[(1+\Gamma_r) + j\Gamma_i\right]\left[(1-\Gamma_r) + j\Gamma_i\right]}{\left[(1-\Gamma_r) - j\Gamma_i\right]\cdot\left[(1-\Gamma_r) + j\Gamma_i\right]}$$

$$r + jx = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 + j2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (6)$$

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (7)$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \qquad (8)$$

Rearranjando (7):

$$r\left[(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2\right] = 1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2$$

$$r\left[(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2\right] + \Gamma_r^2 + \Gamma_i^2 = 1 \qquad \div r$$

$$(1-\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2 + \frac{\Gamma_r^2}{r} + \frac{\Gamma_i^2}{r} = \frac{1}{r}$$

$$1 - 2\Gamma_r + \Gamma_r^2 + \frac{\Gamma_r^2}{r} + \Gamma_i^2 \frac{(r+1)}{r} = \frac{1}{r}$$

$$1 - 2\Gamma_r + \Gamma_r^2 \frac{(1+r)}{r} + \Gamma_i^2 \frac{(1+r)}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{(1+r)}{r}\left[\Gamma_r^2 - 2\Gamma_r \cdot \frac{r}{1+r} + \frac{r}{1+r}\right] + \Gamma_i^2 \frac{(1+r)}{r} = \frac{1}{r} \qquad \times \frac{r}{1+r}$$

$$\underbrace{\Gamma_r^2 - 2\Gamma_r \frac{r}{1+r}} + \frac{r}{1+r} + \Gamma_i^2 = \frac{1}{1+r}$$

↳ impondo regra do quadrado $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ sobre b^2.
Assim, temos q/ descontar $-b^2$

$$\left[\Gamma_r - \frac{r}{r+1}\right]^2 - \frac{r^2}{(1+r)^2} + \frac{r}{1+r} + \Gamma_i^2 = \frac{1}{1+r}$$

$$\left[\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right]^2 + \Gamma_i^2 = \frac{1}{1+r} + \frac{r^2}{(1+r)^2} - \frac{r}{1+r}$$

$$\left[\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right]^2 + \Gamma_i^2 = \frac{1}{(1+r)}\left[1 + \frac{r^2}{(1+r)} - r\right]$$

$$= \frac{1}{(1+r)}\left[\frac{1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} - \cancel{r} - \cancel{r^2}}{(1+r)}\right]$$

$$\left[\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right]^2 + \Gamma_i^2 = \left[\frac{1}{1+r}\right]^2 \qquad (9)$$

seguindo raciocínio similar p/ (8) :

$$x\left[(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2\right] = 2\Gamma_i$$

$$(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2 = \frac{2\Gamma_i}{x}$$

como $(1-\Gamma_r)^2 = (\Gamma_r-1)^2$

$$(\Gamma_r-1)^2+\Gamma_i^2-\frac{2\Gamma_i}{x} = 0$$

$$(\Gamma_r-1)^2+\left[\Gamma_i-\frac{1}{x}\right]^2-\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left[\Gamma_r-1\right]^2+\left[\Gamma_i-\frac{1}{x}\right]^2 = \left[\frac{1}{x}\right]^2 \qquad (10)$$

As equações (9) e (10) são similares a:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = a^2 \qquad (11)$$

Eq. (11) é a equação geral de um círculo de raio a, centrado em (h,k).

A equação (9) é a equação de círculos-r (ou círculos de resistência), com

$$\text{centro em} \quad (\Gamma_r,\Gamma_i) = \left(\frac{r}{1+r},\ 0\right) \qquad (12)$$

$$\text{raio} \quad a = \frac{1}{1+r} \qquad (13)$$

Similarmente, a equação (10) é a equação de círculos-x (ou círculos de reatância), com centro em $(\Gamma_r, \Gamma_i) = \left(1, \dfrac{1}{x}\right)$ (14)

raio $a = \dfrac{1}{x}$ (15)